

Fyzika – riešenia

1. Napíšte, ktoré z rovníc sú z hľadiska fyzikálnych jednotiek konzistentné a ktoré nie:

(a) $v = 1 \text{ m s}^{-1} + a/t$

(b) $s = 5 \text{ m s}^{-1} \times t + 1 \text{ km}$

(c) $mv = 5 \text{ kg s}^{-2} \times a/v$

(d) $m = 2 \text{ N} \times 10 \text{ s}/v$

kde s je dráha, v rýchlosť, a zrýchlenie, t čas a m hmotnosť.

Na ľavej strane rovnosti v podúlohe (a) vidíme rýchlosť v , ktorej jednotky sú, podobne ako v prípade prvého člena na pravej strane, m s^{-1} , teda metre za sekundu. To však nemožno povedať o druhom člene na pravej strane, ktorý zodpovedá podielu zrýchlenia a času a má jednotky m s^{-3} . Ide teda o výraz, ktorý z hľadiska jednotiek nemôže byť konzistentný.

V podúlohe (b) sa na pravej strane nachádza člen $5 \text{ m s}^{-1} \times t$. Ak čas t vyjadríme v sekundách, dostaneme fyzikálne jednotky

$$\text{m s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}, \quad (1.1)$$

teda metre. Keďže metre aj kilometre sú správnymi jednotkami dráhy s na ľavej strane rovnosti, tento výraz je jednotkovo konzistentný.

V (c) je na ľavej strane súčin hmotnosti a rýchlosti s jednotkami kg m s^{-1} . Jednotky pravej strany sú pritom

$$\text{kg s}^{-2} \times \frac{\text{m s}^{-2}}{\text{m s}^{-1}} = \text{kg s}^{-3}. \quad (1.2)$$

Keďže ľavá a pravá strana rovnosti (c) majú rôzne jednotky, opäť ide o jednotkovo nekonzistentný prípad.

Napokon v (d) vystupuje na pravej strane kombinácia jednotiek

$$\text{N} \times \text{s} \times \frac{1}{\text{m s}^{-1}} = \text{kg m s}^{-2} \times \text{s} \times \frac{1}{\text{m s}^{-1}} = \text{kg}, \quad (1.3)$$

čo naozaj zodpovedá jednotkám hmotnosti na ľavej strane. Táto rovnosť je teda z hľadiska jednotiek v poriadku.

2. Teleso s hmotnosťou 2 kg bolo vystrelené šikmo nahor zo zanedbateľnej výšky rýchlosťou 20 m/s pod uhlom 30° k vodorovnej rovine. Odpor vzduchu neuvažujte. Tiažové zrýchlenie je približne 10 m/s^2 .

(a) Vypočítajte maximálnu výšku, ktorú teleso dosiahne.

(b) Ako dlho bude teleso vo vzduchu?

Označme veľkosť počiatočnej rýchlosti ako v , uhol, ktorý táto rýchlosť zvierá s vodorovnou rovinou, ako α a veľkosť tiažového zrýchlenia ako g . Obe položené otázky budeme vedieť zodpovedať, ak sa zameriame

na opis zvislej zložky rýchlosti v_y a výšky y , v ktorej sa teleso nachádza. Keďže počiatočná výška je zanedbateľná, počas letu telesa bude v čase t platiť

$$v_y(t) = v \sin \alpha - gt, \quad (2.1)$$

$$y(t) = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2, \quad (2.2)$$

kde $v \sin \alpha$ sme dostali ako priemet počiatočnej rýchlosti do zvislého smeru.

Teleso dosiahne maximálnu výšku vtedy, keď jeho zvislá zložka rýchlosti bude nulová. To podľa rovnice (2.1) nastane v čase

$$t_1 = \frac{v \sin \alpha}{g}, \quad (2.3)$$

a dosadením do rovnice (2.2) dostaneme maximálnu výšku

$$y(t_1) = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.4)$$

Teleso dopadne na zem v okamihu, keď jeho výška bude nulová. Označme t_2 čas, v ktorom nastane tento okamih. Podľa rovnice (2.2) platí

$$vt_2 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0. \quad (2.5)$$

Ide o kvadratickú rovnicu, ktorá má dve riešenia. Prvé, $t_2 = 0$, je triviálne a zodpovedá počiatočnému času, nakoľko je teleso vystrelené zo zanedbateľnej (prakticky nulovej) výšky. Druhé riešenie,

$$t_2 = \frac{2v \sin \alpha}{g}, \quad (2.6)$$

zodpovedá času dopadu telesa, a teda času, ktorý teleso od začiatku pohybu strávilo vo vzduchu.

Po dosadení číselných hodnôt z rovníc (2.4) a (2.6) zistíme, že teleso dosiahlo maximálnu výšku 5 metrov a jeho let trval 2 sekundy. Na záver dodajme, že nakoľko sme zanedbali odpor vzduchu, výsledky nezávisia od konkrétnej hodnoty hmotnosti vystreleného telesa.

3. Vlak opustil stanicu rovnomerne zrýchľujúc z pokoja so zrýchlením 1 m s^{-2} , až kým nedosiahol rýchlosť 72 km h^{-1} . Túto rýchlosť udržal konštantnú po dobu 10 minút. Potom začal brzdiť so spomalením veľkosti 2 m s^{-2} , až napokon zastavil v nasledujúcej stanici. Akú vzdialenosť prešiel vlak medzi stanicami?

Pohyb vlaku pozostáva z troch rôznych častí. Označme im zodpovedajúce časy ako t_1 , t_2 , t_3 a prejdené vzdialenosti s_1 , s_2 , s_3 . Prvá časť zodpovedá rovnomerne zrýchlenému pohybu so zrýchlením $a_1 = 1 \text{ m s}^{-2}$ pokiaľ vlak nedosiahne rýchlosť $v = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$. Platí pritom

$$v = a_1 t_1, \quad (3.1)$$

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{v^2}{2a_1} = 200 \text{ m}. \quad (3.2)$$

Následne sa vlak pohybuje konštantnou rýchlosťou v po dobu $t_2 = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$. Prejde tak vzdialenosť

$$s_2 = vt_2 = 12000 \text{ m}. \quad (3.3)$$

Nakoniec v tretej časti vlak rovnomerne brzdí so spomalením $a_3 = 2 \text{ m s}^{-2}$, teda

$$0 = v - a_3 t_3, \quad (3.4)$$

$$s_3 = vt_3 - \frac{1}{2}a_3 t_3^2 = \frac{v^2}{2a_3} = 100 \text{ m}. \quad (3.5)$$

Súčtom vzdialeností s_1 , s_2 , s_3 môžeme nahliadnuť, že vlak prešiel medzi stanicami vzdialenosť 12300 m.

4. Guľa s hmotnosťou m a rýchlosťou veľkosti $3v$ sa čelne pružne zrazí s guľou hmotnosti $3m$ pohybujúcou sa v tom istom smere rýchlosťou v . Aká bude rýchlosť ťažšej gule po zrážke?

Hoci úlohu možno jednoducho a elegantne riešiť prechodom do ťažiskovej vzťažnej sústavy, my sa budeme držať štandardného postupu vychádzajúceho so zákonov zachovania hybnosti a energie v pružnej zrážke. Označme počiatočné hybnosti ľahšej a ťažšej gule ako p a P , pričom $p = P = 3mv$. Po zrážke nech sú ich hybnosti p' a P' . Podľa zákona zachovania hybnosti platí

$$p + P = p' + P', \quad (4.1)$$

čo možno prepísať aj ako

$$p - p' = P' - P. \quad (4.2)$$

Zákon zachovania energie hovorí

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{P^2}{3m} = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{P'^2}{3m} \quad (4.3)$$

čo podobne, ako v rovnici (4.2), prepíšeme ako

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{p'^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{P'^2}{3m} - \frac{1}{2} \frac{P^2}{3m}. \quad (4.4)$$

Túto rovnicu môžeme ďalej upraviť ako

$$\frac{1}{2m}(p + p')(p - p') = \frac{1}{6m}(P' + P)(P' - P). \quad (4.5)$$

Z rovnice (4.2) vieme, že v rovnici (4.5) je druhá zátvorka na ľavej strane rovnaká ako druhá zátvorka na pravej strane. Môžeme ich teda vykrátiť a po vynásobení celej rovnice faktorom $6m$ dostaneme

$$3p + 3p' = P' + P. \quad (4.6)$$

Ak do tejto rovnice dosadíme $p' = p + P - P'$ z rovnice (4.2), ľahko uvidíme

$$6p + 3P - 3P' = P' + P \quad (4.7)$$

a po úprave

$$P' = \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}P = 6mv \quad (4.8)$$

čo zodpovedá výslednej rýchlosti ťažšej z guľí rovnej $P'/(3m) = 2v$. Pre ľahšiu guľu vychádza rýchlosť rovná nule. Zrážka teda prebehne tak, že ľahšia a rýchlejšia guľa dobehne ťažšiu a pomalšiu, odovzdá jej svoju hybnosť a po náraze zastane.

5. Auto s hmotnosťou 1.2 t má motor s maximálnym výkonom 63 kW. Ak sa pohybuje po rovine konštantnou rýchlosťou 48 km/h, výkon motora je iba 15 kW. Aký najväčší uhol môže s vodorovnou rovinou zvierat cesta, po ktorej sa auto dokáže pohybovať rovnakou rýchlosťou, ak sú odporové sily rovnaké v oboch prípadoch? Stačí, ak vyjadríte niektorú z goniometrických funkcií hľadaného uhla.

Označme výkon motora na rovine ako P a jeho maximálny výkon ako P' . Ak sú sily odporu v oboch prípadoch rovnaké, potom rozdiel medzi P' a P spočíva iba v prekonávaní zložky tiaže smerujúcej pozdĺž cesty, teda

$$P' - P = mgv \sin \alpha, \quad (5.1)$$

odkiaľ po dosadení číselných hodnôt dostaneme $\sin \alpha = 0.3$, čo zodpovedá $\alpha \doteq 17.46^\circ$.

6. Aký by bol podľa tretieho Keplerovho zákona polomer kruhovej trajektórie hypotetickej planéty, ktorej doba obehu by bola 1000 pozemských rokov? Výsledok vyjadrite v násobkoch polomeru obežnej dráhy Zeme.

Podľa tretieho Keplerovho zákona pre obežnú dobu planéty T a polomer jej obežnej dráhy a platí

$$\left(\frac{T}{1 \text{ rok}}\right)^2 = \left(\frac{a}{1 \text{ AU}}\right)^3, \quad (6.1)$$

kde AU je astronomická jednotka zodpovedajúca polosi obežnej dráhy Zeme ($1 \text{ AU} = 149\,600\,000 \text{ km}$). Z horeuvedeného vzťahu zjavne dostaneme $a = 100 \text{ AU}$.

7. V nádobe je 0.5 kg vody s teplotou 20°C . Koľko tepla je potrebné dodať, aby sa voda zohrialala na 80°C ? Merná tepelná kapacita vody je približne $c = 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Teplo Q , ktoré musíme vode v nádobe dodať, môžeme vypočítať ako súčin jej hmotnosti m , mernej tepelnej kapacity c , a požadovanej zmeny teploty $\Delta T = 60 \text{ K}$, teda

$$Q = mc\Delta T = 0.5 \text{ kg} \times 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \times 60 \text{ K} = 126 \text{ kJ}. \quad (7.1)$$

8. Akú prácu vykoná ideálny plyn, ktorý z počiatočného objemu V_0 a tlaku p_0 izobaricky expanduje na trojnásobný objem.

Pri izobarickom deji je tlak plynu konštantný, preto prácu W vykonanú plynom možno vypočítať ako súčin tlaku a zmeny objemu. Dostávame tak

$$W = p_0(3V_0 - V_0) = 2p_0V_0. \quad (8.1)$$

9. Dva bodové náboje $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ a $Q_2 = -3 \mu\text{C}$ sú od seba vzdialené $d = 10 \text{ cm}$. Určte približnú veľkosť elektrickej sily, ktorou na seba pôsobia. Permittivita vákua $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Podľa Coulombovho vzťahu pre veľkosť elektrickej sily pôsobiacej medzi dvoma nábojmi platí

$$|\mathbf{F}_{\text{Coulomb}}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{d^2} = \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}} \frac{2 \times 10^{-6} \text{ C} \times 3 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.01 \text{ m}^2} \doteq 5.4 \text{ N}. \quad (9.1)$$