

Matematika – riešenia

1. Vyriešte kvadratickú rovnicu $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Riešenia nájdeme napríklad úpravou na úplný štvorec. Najprv celú rovnicu prepíšme ako

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = x^2 - 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{5}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0 \quad (1.1)$$

odkiaľ už ľahko nahliadneme, že

$$x = \frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}. \quad (1.2)$$

Riešeniami rovnice sú preto $x = -1$ a $x = 5/2$.

2. Nájdite všetky riešenia goniometrických rovníc

(a) $\sin 3x = 1$

(b) $2 \cos x \tan x (1 - \sin x) = 2 \cos^2 x - 1$

Funkcia sínus nadobúda hodnotu rovnú jednej iba vtedy, ak sa jej argument rovná $\pi/2$ plus ľubovoľný celočíselný násobok 2π . Riešením podúlohy (a) sú preto všetky x spĺňajúce

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Podúloha (b) je zaujímavejšia. Najprv na ľavej strane rovnice dosadíme $\tan x = \sin x / \cos x$ a následne na pravej strane $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Dostaneme tak rovnicu

$$2 \sin x (1 - \sin x) = 1 - 2 \sin^2 x \quad (2.2)$$

a teda

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad (2.3)$$

čo platí pre dve sady riešení

$$x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

3. Čomu sa rovná $\sin x$, ak $\tan x = 2$ a viete, že x zodpovedá uhlu v prvom kvadrante jednotkovej kružnice?

V prvom kvadrante jednotkovej kružnice nadobúdajú funkcie sínus aj kosínus kladné hodnoty. Z rovnice

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (3.1)$$

tak možno vyjadriť

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (3.2)$$

a následne

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = 2. \quad (3.3)$$

Práve z poslednej rovnosti vyjadríme $\sin x$ ako

$$\sin x = 2\sqrt{1 - \sin^2 x}. \quad (3.4)$$

Odtiaľ po umocnení na druhú a úprave dostaneme

$$\sin^2 x = \frac{4}{5} \quad (3.5)$$

a keďže v prvom kvadrante je $\sin x$ kladný, môžeme usúdiť $\sin x = 2/\sqrt{5}$.

4. Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $\log(x+5) - \log(x-5) = 1 - \log 2$

(b) $\log_5 x + \log_x 5 = 2$

V podúlohe (a) využijeme známu skutočnosť, že súčet (rozdiel) logaritmov je logaritmus súčinu (podielu) ich argumentov. Na pravej strane rovnice tiež prepíšeme 1 ako $\log 10$. Dostávame tak

$$\log \frac{x+5}{x-5} = \log \frac{10}{2} = \log 5. \quad (4.1)$$

Keďže $\log x$ je prostá funkcia argumentu x , môžeme z horeuvedeného usúdiť

$$\frac{x+5}{x-5} = 5 \quad (4.2)$$

odkiaľ po jednoduchšej úprave máme $x = 15/2$.

Úplne základné znalosti logaritmov nám v podúlohe (b) okamžite ukážu riešenie $x = 5$. Pre vylúčenie alebo nájdenie iných riešení použijeme všeobecný vzťah pre logaritmy rôznych základov,

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (4.3)$$

pre kladné reálne čísla a, b, c . Potom už ľahko prevedieme logaritmy s nepříjemnými základmi na ľavej strane rovnice na logaritmy desiatkové, teda

$$\frac{\log x}{\log 5} + \frac{\log 5}{\log x} = 2. \quad (4.4)$$

Ak túto rovnicu vynásobíme $\log x \log 5$, dostaneme

$$\log^2 x + \log^2 5 = 2 \log x \log 5 \quad (4.5)$$

alebo

$$(\log x - \log 5)^2 = 0 \quad (4.6)$$

odkiaľ $x = 5$.

5. Uvažujte vektory $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ a $\mathbf{b} = (4, 0, -1)$. Nájdite

(a) rozdiel $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(b) skalárny súčin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

(c) vektorový súčin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(d) jednotkový vektor ležiaci v rovine xy a zároveň kolmý na vektor $\mathbf{a}$

Zložky rozdielu vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ v podúlohe (a) možno ľahko získať z rozdielov ich zložiek, teda

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1 - 4, 2 - 0, 3 + 1) = (-3, 2, 4). \quad (5.1)$$

Podobne jednoducho možno vyjadriť aj skalárny súčin ako

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 4 + 0 - 3 = 1, \quad (5.2)$$

zatiaľ čo pre vektorový súčin platí

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = (-2, 13, -8). \quad (5.3)$$

Aby sme vyriešili podúlohu (d), nájdeme najprv taký vektor $\mathbf{v}$, ktorý leží v rovine xy a je kolmý na vektor $\mathbf{a}$. Tento vektor bude mať vo všeobecnosti zložky $(v_x, v_y, 0)$. Kolmosť vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{v}$ znamená, že

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = v_x + 2v_y = 0. \quad (5.4)$$

Môžeme teda napísať $\mathbf{v} = (-2v_y, v_y, 0)$, z čoho získame jednotkový vektor tak, že ho vydelíme $\pm|\mathbf{v}|$. Riešením podúlohy (d) sú teda dva vektory

$$\pm(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0). \quad (5.5)$$

6. Nájdite rovnicu roviny, v ktorej ležia body $A[0, 1, 2]$, $B[2, 0, 1]$, $C[1, 2, 0]$ a nájdite vzdialenosť tejto roviny od bodu $O[0, 0, 0]$.

Aby sme našli rovnicu hľadanej roviny, nájdeme najprv k nej normálový vektor $\mathbf{n}$. Ten získame ako vektorový súčin

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \quad (6.1)$$

kde

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, -1), \quad (6.2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, -2). \quad (6.3)$$

Takto dostaneme $\mathbf{n} = (3, 3, 3)$. Keďže však na jeho veľkosti nezáleží, môžeme pracovať s $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$. Hľadaná rovnica roviny bude mať preto tvar

$$x + y + z = 3, \quad (6.4)$$

kde konštantu na pravej strane sme určili tak, aby bod A vyhovoval tejto rovnici (potom jej už vyhovujú aj B a C).

Označme hľadanú vzdialenosť bodu O od našej roviny ako d_O . Ak sa potom posunieme z bodu O v smere vektora $\mathbf{n}$ o vzdialenosť d_O , mali by sme sa dostať do bodu patriaceho rovine. Na úrovni zložiek má takýto bod súradnice

$$O + d_O \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = [d_O/\sqrt{3}, d_O/\sqrt{3}, d_O/\sqrt{3}]. \quad (6.5)$$

Dosadením do rovnice (6.4) dostaneme $d_O = \sqrt{3}$.

7. Nájdite hlavnú poloos a relatívnu excentricitu elipsy danej rovnicou

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 8y = 0.$$

Poloosi elipsy a jej excentricitu nájdeme najľahšie tak, že jej rovnicu upravíme na zvyčajný tvar

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7.1)$$

Úpravou na úplné štvorce získame

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 8y = (x - 1)^2 - 1 + 2(y + 2)^2 - 8 = 0 \quad (7.2)$$

a teda

$$\frac{(x - 1)^2}{3^2} + \frac{(y + 2)^2}{(3/\sqrt{2})^2} = 1. \quad (7.3)$$

Hlavná a vedľajšia poloos našej elipsy sú teda $a = 3$ a $b = 3/\sqrt{2}$. Relatívna excentricita elipsy je potom

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7.4)$$

8. Uvažujte komplexné číslo $z = 3 - 4i$. Vypočítajte

(a) $|z|$

(b) $\operatorname{Re}(z)$

(c) $\operatorname{Im}(1/z)$

Pre veľkosť komplexného čísla použijeme známy vzťah, podľa ktorého $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Očividná je aj reálna časť $\operatorname{Re}(z) = 3$. Aby sme určili $\operatorname{Im}(1/z)$, použijeme nasledujúce úpravy.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 4i} = \frac{1}{3 - 4i} \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i \quad (8.1)$$

odkiaľ zjavne $\operatorname{Im}(1/z) = 4/25$.